Intervālu dalīšanas metode

Pieņemsim, ka dots vienādojums $f(x)=0$, divi skaitļi a un b tādi, ka $f(a)$ un $f(b)$ ir ar pretējām zīmēm (viens pozitīvs, otrs negatīvs) un, ka $f(x)$ ir intervālā $[a,b]$ nepārtraukta funkcija. Tad varam apgalvot, ka intervālā $[a,b]$ dotajam vienādojumam eksistē vismaz viena sakne. To viegli saprast, ja iedomājamies funkcijas grafiku. Tā kā $f(a)$ un $f(b)$ ir ar pretējām zīmēm, tad vienā no punktiem a un b grafiks atrodas virs x ass, bet otrā – zem x ass. Tā kā grafiks ir nepārtraukts, tad starp a un b tam neizbēgami vismaz vienu reizi jākrusto x ass (krustpunktā ir sakne).

Aplūkosim metodi, kā noteikt šīs saknes aptuveno vērtību ar precizitāti ε.

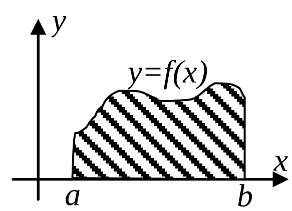
Atradīsim nogriežņa $[a,b]$ viduspunktu $c=\frac{a+b}{2}$. Ja $f(c)=0$, tad sakne atrasta – tā ir skaitlis c. Pretējā gadījumā tālāk aplūkosim to no intervāliem $[a;c]$ un $[c;b]$, kura galapunktos $f(x)$ vērtības ir ar pretējām zīmēm. Pēc tam šo intervālu atkal pārdalīsim uz pusēm utt. Tā turpināsim līdz iegūsim intervālu, kura garums nepārsniedz ε un kurā atrodas sakne. Tad par saknes aptuveno vērtību ar precizitāti ε varam ņemt šī intervāla viduspunktu vai vienu no galapunktiem.

Piemērs. Atradīsim vienādojuma $x^3+3x-1=0$ sakni intervālā $[0;1]$ ar precizitāti līdz tūkstošdaļai. Aprēķini apkopoti tabulā. Katrā nākošajā tabulas rindiņā ar a un b apzīmēti jaunā sakni saturošā intervāla galapunkti.

a	*b*	*c*	*f*(*a*)	*f*(*b*)	*f*(*c*)	*b-a*	Sakne ir starp
0	1	0,5	-1	3	0,625	1	*a* un *c*
0	0,5	0,25	-1	0,625	-0,234375	0,5	*c* un *b*
0,25	0,5	0,375	-0,23438	0,625	0,177734375	0,25	*a* un *c*
0,25	0,375	0,3125	-0,23438	0,177734	-0,03198242	0,125	*c* un *b*
0,3125	0,375	0,34375	-0,03198	0,177734	0,071868896	0,0625	*a* un *c*
0,3125	0,34375	0,328125	-0,03198	0,071869	0,019702911	0,03125	*a* un *c*
0,3125	0,328125	0,320313	-0,03198	0,019703	-0,00619841	0,015625	*c* un *b*
0,320313	0,328125	0,324219	-0,0062	0,019703	0,006737411	0,007813	*a* un *c*
0,320313	0,324219	0,322266	-0,0062	0,006737	0,000265814	0,003906	*a* un *c*
0,320313	0,322266	0,321289	-0,0062	0,000266	-0,00296722	0,001953	*c* un *b*
0,321289	0,322266	0,321777	-0,00297	0,000266	-0,00135093	0,000977	*c* un *b*

Tātad esam atraduši, ka vienādojuma viena sakne ir $0{,}322\pm0{,}001$. Lai to izdarītu pietika ar 10 intervāla dalīšanām. Viegli saprast, ka ar n dalīšanā intervāls tiek samazināts 2^n reizes.

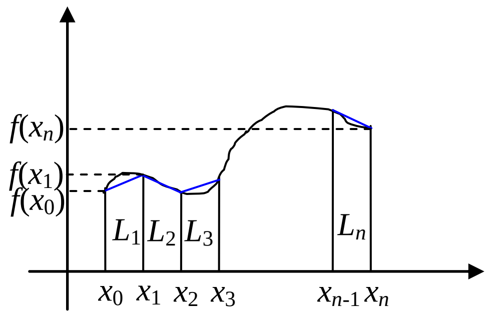
Līklīniju trapeces laukums



1.zīm.

Aplūkosim intervālā $[a;b]$ nepārtrauktu nenegatīvu funkciju $y=f(x)$. Figūru, ko ierobežo šīs funkcijas grafiks, x ass, grafiki $y=a$ un $y=b$, sauksim par līklīniju trapeci (1.zīm.). Aprēķināsim tuvināti līklīniju trapeces laukumu.

Sadalīsim intervālu $[a;b]$ n vienādās daļās. Katras daļas garums tad ir $h=\frac{b-a}{n}$. Sadalīsim līklīniju trapeci n daļās, novelkot vertikālu nogriezni caur katru dalījuma punktu. Līklīniju trapeces laukumu varam aprēķināt kā atsevišķo daļu summu: $L=L_1+L_2+...+L_n$. Taču katra daļa arī ir līklīniju trapece. Aizstāsim šo līklīniju trapeču līko malu ar nogriezni (2.zīm.). Tādējādi iegūsim parastas trapeces, kuru laukumu varam aprēķināt, sareizinot trapeces pamatu pussummu ar augstumu. Protams, aizstāšanas rezultātā laukums izmainās. Taču šī izmaiņa būs maza, ja izvēlēsimies pietiekami lielu n. Tātad



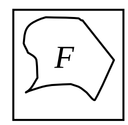
2.zīm.

$$L\approx\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+...+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\cdot\ f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)$$

Montekarlo metode

Pieņemsim, ka jāaprēķina laukums figūrai F. Konstruēsim taisnstūri tā, lai figūra F pilnīgi ietilpst taisnstūrī. Apzīmēsim figūras F laukumu ar $L(F)$ un taisnstūra laukumu ar $L(T)$. Ģenerēsim n gadījuma punktus taisnstūra iekšpusē. To punktu skaitu, kuri atrodas arī figūras F iekšpusē, apzīmēsim ar k. Tad varbūtību, ka gadījuma punkts pieder figūrai F var aprēķināt divējādi: $\frac{L(F)}{L(T)}$ un $\frac{k}{n}$. Tāpēc $\frac{L(F)}{L(T)}=\frac{k}{n}$ un $L(F)=\frac{k\cdot L(T)}{n}$.



Piezīme. Daļa $\frac{k}{n}$ precīzu varbūtību, ka punkts pieder figūrai F, izsaka tikai tad, ja n ir bezgalīgi liels. Tāpēc iegūtā laukuma vērtība būs aptuvena un, jo lielāku n vērtību izvēlēsimies, jo precīzāks būs rezultāts.